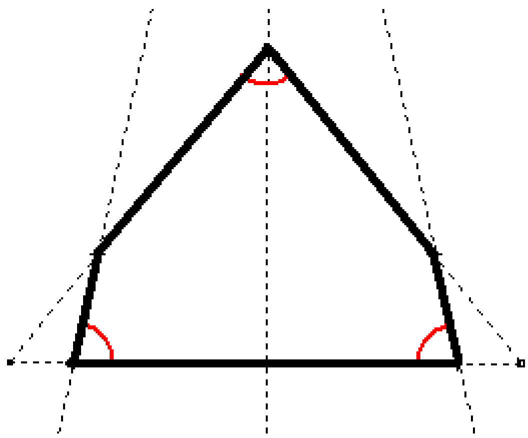
Командная олимпиада Старт-лиги
***VII Южного математического турнира.* 18 сентября 2012 года**

1. Все выпускники математической школы сдавали ЕГЭ по физкультуре и математике. Результат каждого ученика по математике оказался равен сумме результатов остальных учеников по физкультуре. Сколько выпускников в школе, если всего по математике было набрано в 50 раз больше баллов, чем по физкультуре?

Ответ: 51 выпускник. ***Решение:*** Пусть в школе n выпускников, которые в сумме набрали по физкультуре S баллов. Тогда сумма всех баллов по математике ($50S$) будет равна $(n-1)S$, т.к. каждый школьник будет учтён со своими баллами по физкультуре при сравнении с каждым из $(n-1)$ остальных школьников по математике. Учитывая, что по условию задачи $S>0$, то из уравнения $50S=(n-1)S$ найдём n.

2. Найдите множество значений, которые может принимать третий по величине угол в выпуклом пятиугольнике.

Ответ: $60°<\alpha_3<180°$. ***Решение:*** упорядочим углы по возрастанию, $0°<\alpha_1\le\alpha_2\le\alpha_3\le\alpha_4\le\alpha_5<180°$, при этом сумма этих пяти углов равна 540°. Тогда $3\alpha_3\ge\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=540°-\alpha_4-\alpha_5>540°-2\cdot180°=180°$, т.е. $\alpha_3>180°:3=60°$. Аналогично $3\alpha_3\le\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=540°-\alpha_1-\alpha_2<540°$, т.е. $\alpha_3<540°:3=180°$. Причём все случаи угла α_3, большие 60° и меньшие 180°, реализуются. Например, при: 1) $60°<\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3\le108°\le\alpha_4=\alpha_5=(540°-3\alpha_3)/2$ и 2) $(540°-3\alpha_3)/2=\alpha_1=\alpha_2<108°<\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5<180°$. Для этого рассмотрим равнобедренный треугольник с углом $\alpha_3<180°$ при вершине, а затем два его острых угла при основании симметрично относительно высоты-медианы-биссектрисы подрежем рядом с вершинами основания так, что два равных с α_3 угла (в обоих случаях) оказались отмеченными на основании – см. рис. Это можно сделать, т.к. $\alpha_3>60°$, что больше углов при основании исходного равнобедренного треугольника.



3. В ряд выписаны 15 различных чисел. Верно ли, что можно зачеркнуть 10 из них, чтобы оставшиеся располагались либо в порядке возрастания, либо в порядке убывания?

Ответ: нет. ***Контр-пример:*** 13, 14, 15, 9, 10, 11, 12, 5, 6, 7, 8, 1, 2, 3, 4, т.к. найдутся только цепочки максимум из 4 чисел, идущих либо по возрастанию, либо по убыванию.

4. Решите в простых числах уравнение $2p^2+1=q^5$.

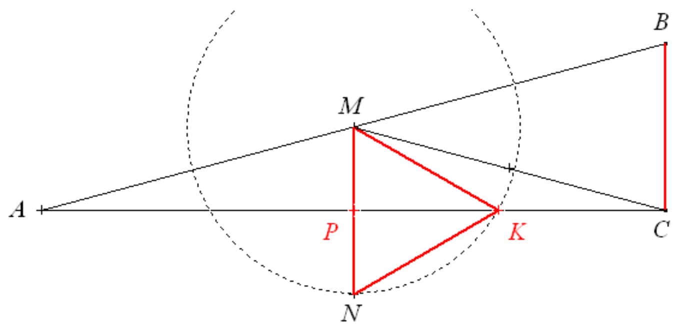
Ответ: $p=11$, $q=3$. ***Решение 1:*** Заметим, что простое число q обязательно нечётное число, тогда $2p^2=q^5-1=(q-1)(q^4+q^3+q^2+q+1)$, где $(q-1)$– чётное число, значит, оно в силу простоты р равно либо 2, либо 2р, либо $2p^2$. Два последних случая не подходят, т.к. тогда второй множитель $(q^4+q^3+q^2+q+1)$ будет равен p или 1, что меньше множителя $(q-1)$, который в свою очередь меньше $(q^4+q^3+q^2+q+1)$, – противоречие. Значит, $q-1=2$, $q=3$, $2p^2=3^5-1=242$, $p^2=121$, $p=11$. ***Решение 2:*** Рассмотрим 2 случая – либо $p=3$, либо $p\ne3$. В первом случае ($p=3$) получим, что $q^5=19$, т.е. q не является даже целым числом. Во втором случае ($p\ne3$) получим, что p не делится на 3, значит, $p^2\equiv1 \pmod 3$, тогда $q^5=2p^2+1\equiv3\equiv0 \pmod 3$, т.е. q□3, значит, $q=3$, тогда $p=11$.

5. В школе учатся 100 учеников. Каждый день двое из них дежурят. Требуется составить график дежурств на некоторый период времени так, чтобы для каждых двух учеников нашёлся день, когда один из них дежурит, а другой нет. Какое наименьшее количество дней может охватывать такой график?

Ответ: 66 дней. ***Решение:*** Рассмотрим граф дежурств, в котором ученики – вершины, пара дежурных – ребро. В нём возможна максимум одна изолированная вершина, иначе школьники-изолированные вершины не удовлетворяют условию. Также невозможна компонента связности, состоящая из одного ребра. Значит, в каждой компоненте связности, отличной от изолированной вершины, не менее трёх вершин, а рёбер не меньше, чем в дереве, т.е. рёбер не меньше, чем число вершин в этой компоненте минус 1. Пусть у нас k компонент связности и они содержат соответственно $n_1 \le n_2 \le n_3 \le \ldots \le n_k$ вершин, при это n_1 может равняться 1, а все остальные числа не меньше 3. Тогда в нашем графе рёбер не меньше, чем $(n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k-k)=100-k$. При этом наименьшее количество будет в случае, если каждая компонента связности – дерево, а самих компонент связности будет максимально возможное число. Т.к. во всех компонентах, кроме возможно первой, не менее трёх вершин, то самих компонент не меньше 99:3+1=34. Тогда рёбер в графе не меньше 100–34=66. Это возможно в случае одной изолированной вершины и 33-х компонент связности по 3 вершины с двумя рёбрами. Этот пример очевидным образом подходит под условие задачи.

6. Точка *M* – середина гипотенузы *AB* прямоугольного треугольника *ABC*, в котором угол *A* равен 15°. На катете *AC* отмечена точка *K* такая, что *KM* = *BC* и угол *AMK* – тупой. Найдите углы треугольника *KBC*.

Ответ: 90°, 45° и 45°. ***Решение:*** Воспользуемся методом «идеального» построения, построив параллелограмм *CBMN* с помощью центральной симметрии относительно середины отрезка *MC*. Тогда середина *P* отрезка *MN* будет одновременно серединой стороны *AC* исходного треугольника, а *MP* будет средней линией этого треугольника.



Значит, $MP=MN/2=BC/2=MK/2$, т.е. катет *MP* равен половине гипотенузы *MK* в прямоугольном треугольнике *MPK* и $\angle MKP=30°$. Тогда $\angle MKC=150°$. Учитывая, что *MCB* равнобедренный треугольник с $\angle MCB=\angle MBC=75°$, получим, что $\angle MCK=90°-75°=15°$ и $\angle CMK=180°-\angle MCK-\angle MKC=180°-15°-150°=15°$. Значит, ΔMKC – равнобедренный с двумя углами по 15°, $KC=MK=BC$. Тогда ΔKBC – равнобедренный прямоугольный.

7. Действительные числа *a*, *b*, *c*, *d* таковы, что сумма их квадратов равна 1. Докажите неравенство $a(b+c+d)\le \frac{\sqrt{3}}{2}$**.**

Решение: Исходное неравенство равносильно неравенству $\frac{2}{\sqrt{3}}a(b+c+d)\le 1=a^2+b^2+c^2+d^2$, которое в свою очередь после переноса всех чисел в одну сторону равносильно верному неравенству

$$\frac{a^2}{3}-\frac{2ab}{\sqrt{3}}+b^2+\frac{a^2}{3}-\frac{2ac}{\sqrt{3}}+c^2+\frac{a^2}{3}-\frac{2ad}{\sqrt{3}}+d^2=(\frac{a}{\sqrt{3}}-b)^2+(\frac{a}{\sqrt{3}}-c)^2+(\frac{a}{\sqrt{3}}-d)^2\ge 0.$$