IX Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок».
VIII Южный математический турнир.
Старт-лига. <u>IV тур. Матбои за 5-10 места</u>. 22 сентября 2013 года. *Решения*.

1. На левых 213 клетках клетчатой полоски 1×2013 стоит по фишке. За один ход фишка смещается вправо на пустую клетку, перепрыгнув не более чем через одну фишку. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Тот, кто не сможет ходить – проиграл. Кто из них может выигрывать, как бы не играл соперник.

<u>Ответ:</u> Выигрывает Петя. ***<u>Решение:</u>*** Первым своим ходом самую правую фишку он ставит на самую крайнюю правую клетку. После этого он разбивает все оставшиеся фишки и клетки на пары соседних – доминошки, из которых первые 106 доминошек заполнены фишками. Вначале Вася вынужден сходить одной из фишек самой правой доминошки, попадая в какую-то новую доминошку, тогда Петя парной фишкой заполняет оставшуюся клетку доминошки. Далее Вася всегда ходит какой-то фишкой одной из доминошек, попадая в свободную доминошку, а Петя заполняет оставшуюся клетку этой доминошки парной фишкой. Т.к. количество ходов конечно (каждая фишка конечного набора может сдвинуться вправо конечное число раз), то рано или поздно кто-то не сможет сходить, причём согласно приведённой стратегии это будет на Петя, значит, Вася в некоторый момент не сможет сходить, т.е. Вася проиграет.

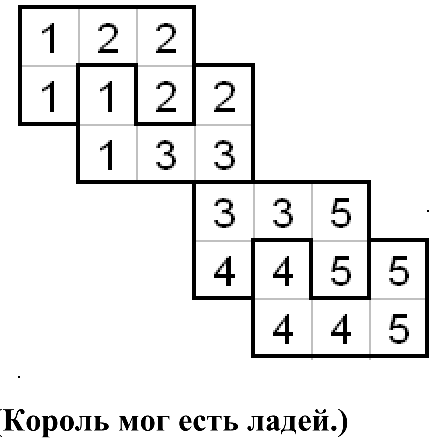
2. В магазине есть плитки шоколада нескольких названий, каждое название – своего веса (не менее 100г). Известно, что сколько бы грамм шоколада не попросил покупатель (но не менее 100г), можно выдать ему плитками вес, отличающийся от запрошенного (в ту или другую сторону) не более чем на 20%. Какое наименьшее число названий шоколада может быть в магазине?

<u>Ответ:</u> 2, например, плитки по 100 и 150 грамм. ***<u>Решение</u>*:** если запрошен вес Z, то суммарный вес V выданных плиток должен оказаться в промежутке $[0{,}8Z;1{,}2Z]$, значит, должно выполняться неравенство $5V/6\le Z\le 1{,}25V$. Тогда, если есть плитки только одного веса a, то вес $1{,}5a$ нельзя выдать плитками с точностью 20%. Значит, нужны плитки как минимум двух видов. Покажем, что можно обойтись только плитками по 100 и 150 г. Тогда с помощью $V=100$ мы удовлетворим потребности при $Z\in[100;125]$, $V=150 \rightarrow Z\in[125;187{,}5]$, $V=200=2\cdot 100 \rightarrow Z\in[166+1/6;250]$, $V=300=3\cdot 100 \rightarrow Z\in[250;375]$, $V=400=4\cdot 100 \rightarrow Z\in[333+1/3;500]$, $V=600=6\cdot 100 \rightarrow Z\in[500;750]$. А при $V=100n$, где n – натуральное число, не меньшее 7, мы сможем удовлетворить потребности в промежутке, большем, чем $[100(n-1);100(n+1)]$. Таким образом, мы сможем выдать любой вес, не меньший 100г, с соблюдением условия.

3. В равенстве *p*=*ab*+*cd* число *p* – простое, а числа *a*, *b*, *c*, *d* – различные составные. Найдите наименьшее значение *p*.

<u>Ответ:</u> $167=9\cdot 15+4\cdot 8$. ***<u>Решение:</u>*** Т.к. p – простое число, заведомо большее 2, то оно – нечётное. Значит, одно из слагаемых (пусть ab) должно быть нечётным, а другое (cd) – чётным. Тогда $p=ab+cd\ge 9\cdot 15+4\cdot 6=135+24=159$, т.к. 9 и 15 – наименьшие нечётные составные числа, а 4 и 6 – наименьшие составные числа. 159 – составное число, кратное 3. Значит, нам надо увеличивать наши множители. Если увеличить хотя бы один множитель первого слагаемого, то вся сумма увеличится минимум на 9 и станет больше 167. Значит, увеличивать надо произведение cd, но следующее возможное значение этого произведения равно $4\cdot 8=32$, что уже и даст нам число 167.

4. Нарисуйте клетчатую фигуру, которую можно разрезать как на 8 равных пятиклеточных фигур в виде буквы «С» (см. рис.), так и на 10 равных четырёхклеточных фигур.



***<u>Решение</u>*:** Фигуру на рисунке можно разбить на 4 одинаковых *С*-петамино или на 5 одинаковых *Z*-тетрамино (фигуры отмечены равными цифрами). Сложив вместе две таких фигуры, получим требуемое.

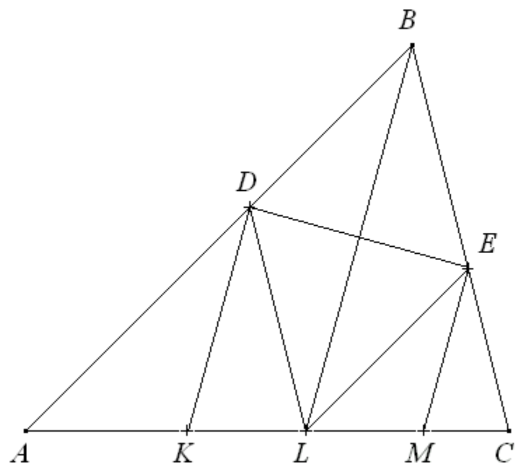
5. На шахматной доске 5×5 в начале игры находился белый король в углу и 10 черных ладей. Ходили строго по очереди: сначала король, затем одна из ладей, опять король, одна из ладей, король и т.д. Король, ни разу не попав под шах, перешел в противоположный угол. Мог ли он сделать не более 20 ходов? (Король мог есть ладей.)

Ответ: Мог, причём минимум за 13 ходов, например, когда король на a1, ладьи на b2 и в верхнем правом квадрате 3×3. Ходы: 1.b2 a5 2.b1 a2 3.a2 e1 4.b2 a1 5. a1 d2 6. b1 a2 7.a2 e1 8. b2 a4 9.c3 da5 10.b2 aa1 11.c3 eb1 12.d4 5a2 13.e5. ***Доказательство оценки на 13 ходов:*** Назовём вертикали b,c,d,e и горизонтали 2,3,4,5 *важными* рядами. Сначала король на важных рядах не бывал, а каждая из ладей стоит на двух важных рядах. Свяжем каждую ладью с важными рядами, где она изначально стоит. Всего есть 20 связей. При первом появлении короля на важном ряду будем добавлять королю по очку, если же он появился на клетке, находящейся сразу в двух новых для себя важных рядах, то соответственно добавляем ему 2 очка. К концу у короля будет 8 очков, а все связи ладей должны исчезнуть. Связь исчезает либо из-за ухода ладьи с ряда (не более одной связи за ход), либо за счет съедания ладьи (каждая связь переходит в очко). Так как король съест не более 8 связей, то ладьи сделают не менее 20–8=12 ходов. Первым и последним ходит король, поэтому он сделает не менее 13 ходов.

6. Даны три числа. Если их все увеличить на 1, то их произведение тоже увеличится на 1. Если все исходные числа увеличить на 2, то их произведение тоже увеличится на 2. А на сколько увеличится произведение, если все исходные числа увеличить на 3?

Ответ: На 9. ***Решение***: Пусть нам даны изначально числа a, b и c. Будем также считать, что $ab+bc+ca=x$, $a+b+c=y$. Тогда из условий задачи $(a+1)(b+1)(c+1)=abc+1$ и $(a+2)(b+2)(c+2)=abc+2$ после раскрытия скобок и сокращения подобных слагаемых получим, что $x+y=0$, $2x+4y=-6$, откуда $x=3$, $y=-3$. Тогда нужная нам разность равна $(a+3)(b+3)(c+3)-abc=3x+9y+27=3\cdot 3+9\cdot(-3)+27=9$.

7. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *BL*. На сторонах *AB* и *BC* выбраны такие точки *D* и *E* соответственно, что биссектрисы углов *ADL* и *CEL* параллельны *BL*. Докажите, что прямая *DE* перпендикулярна *BL*.



***Доказательство* 1:** Пусть K и M – основания биссектрис углов ADL и CEL соответственно, лежащие на отрезке AC. Тогда в силу параллельности DK, BL и EM по теореме о пропорциональных отрезках выполняются соотношения: $AD/DB=AK/KL$ и $BE/EC=LM/MC$. Но по свойству биссектрисы выполняются соотношения: $AD/DL=AK/KL$ и $LE/EC=LM/MC$. Тогда из всех этих соотношений следует, что $DB=DL$ и $BE=EL$. Т.е. $DBEL$ – дельтоид, значит, его диагонали перпендикулярны, потому что диагональ DE является серединным перпендикуляром к BL в силу равенств $DB=DL$ и $BE=EL$, т.е. прямая DE перпендикулярна BL.

***Доказательство* 2:** Т.к. $DK \| BL$, то $\angle ADK=\angle ABL$ как соответственные, но $\angle LDK=\angle ADK=\angle ABL$ и $\angle LDK=\angle DLB$ (накрест лежащие), значит, $\angle DBL=\angle DLB$. Аналогично доказываем, что $\angle EBL=\angle ELB$. Но BL – биссектриса, значит, все четыре угла равны: $\angle DLB=\angle DBL=\angle EBL=\angle ELB$. Тогда треугольники BDL и BEL – равные равнобедренные (по общей стороне BL), т.е. $DBEL$ – ромб, значит, его диагонали перпендикулярны.

8. В дачном поселке из животных есть только псы и коты. У кота в среднем втрое больше знакомых среди котов, чем среди псов. У пса в среднем впятеро больше знакомых среди псов, чем среди котов. У пса среднее число знакомых животных вдвое больше, чем у кота. Кого в поселке больше: котов или псов, и во сколько раз?

Ответ: Котов больше в 4/3 раза. ***Решение***: Рассмотрим граф, в котором вершины – коты и псы, рёбра – знакомства. Пусть количество рёбер между котами равно a, между псами – b, между группой котов и группой псов – c; количество самих котов – k, количество псов – p. Тогда у кота среднее количество знакомых среди котов равно $2a/k$, т.к. каждое ребро знакомства между котами надо учесть дважды (для каждого из котов), а среди псов – c/k, т.к. каждое ребро знакомства котов с псами теперь учитываем по одному разу; аналогично у пса среднее количество знакомых среди псов равно $2b/p$, а среди котов – c/p; у кота среднее количество знакомых среди животных равно $(2a+c)/k$; у пса среднее количество знакомых среди животных равно $(2b+c)$/p. Тогда из условия задачи следует система уравнений: $2a/k=3c/k$, $2b/p=5c/p$, $(2b+c)/p=2(2a+c)/k$. Подставляем полученные из первых двух уравнений равенства $2a=3c$ и $2b=5c$ в третье уравнение. Тогда $6c/p=8c/k$, откуда $k/p=4/3$.