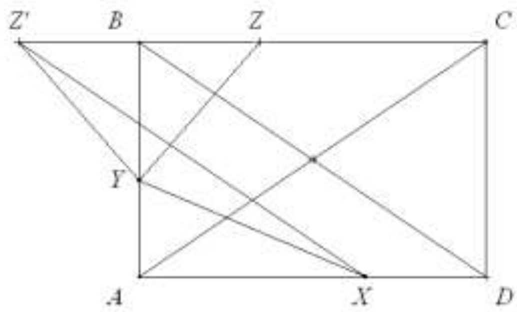
X Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»
IX Южный математический турнир.
Старт-лига. 2 тур. 22 сентября 2014 года. *Решения*.

1. В параде участвовали менее 2014 солдат, ровно 1/99 из них награждена медалями. Всех солдат построили прямоугольником. Оказалось, что медалисты есть не менее чем в 44% шеренг и не менее, чем в 44% колоннах. Сколько всего солдат? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: 1980. ***Решение:*** Пусть есть r награжденных, m шеренг и n колонн. Тогда всего солдат $99r=mn$. Так как $99r<2014$, то $r<2014/99=20^{34}/_{99}$, то есть $r\le 20$. Число награжденных не меньше числа колонн с награждёнными, то есть $r\ge 0{,}44m$ и $r\ge 0{,}44n$. Перемножив эти два неравенства, получим $r^2\ge 0{,}44^2mn=0{,}44^2\cdot 99r$, откуда $r\ge 0{,}44^2\cdot 99=19{,}1664$, то есть с учётом неравенства $r\le 20$ получим $r=20$. Значит, всего солдат $99\cdot 20=1980$. И действительно, такая ситуация могла быть при построении солдат в виде прямоугольника 44×45, когда 20 награждённых стоят по диагонали зоны 20×20.

2. На сторонах *AD, AB* и *BC* прямоугольника *ABCD* выбраны точки *X, Y* и *Z* соответственно. Докажите, что если *AX=CZ*, то *XY + YZ* $\ge$ *AC*.



Решение: Построим на луче *CB* за точкой *B* такую точку *Z'*, что *Z'B=BZ=XD*. Тогда *XDBZ'* – параллелограмм, а *XZ'=DB=AC*, т.к. в прямоугольнике диагонали равны. Кроме того, *YZ'=YZ* в силу равенства треугольников *YBZ* и *YBZ'*. По неравенству треугольника $XY + YZ' \ge XZ'$, причём равенство возможно в случае, если точка *Y* лежит на отрезке *XZ'*. Тогда в силу приведённых выше равенств получим, что $XY + YZ \ge AC$.

3. По кругу стоят 100 коробок, в одной лежит 777 камней, остальные – пустые. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход можно переложить один или несколько камней (но не все) из коробки в соседнюю пустую. Кто не может сделать хода – проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: При правильной игре выиграет Петя. ***Решение:*** Сначала Петя сделает, например, две рядом стоящие коробки с 400 и 377 камнями. После этого он следит за ходами Васи по следующему алгоритму. Если Вася своим ходом уравнял крайние коробки заполненного камнями участка коробок, то он оставляет один камень в какой-нибудь крайней коробке, а остальные перекладывает в следующую пустую коробку. Если Вася всегда будет повторять Петин ход «симметрично», оставляя на краях участка заполненных коробок одинаковое число камней, то после заполнения Васей 99-й коробки Петя переложит что-то в 100-ю и Вася проиграл. Такой ход у Пети будет, т.к. к этому моменту в коробках, соседствующих с последней пустой, будет по 329 камней согласно стратегии Пети оставлять по одному камню. Значит, чтобы не проиграть Вася вынужден будет в некоторый момент сделать крайние коробки заполненного участка разными по количеству камней. Тогда Петя уравняет края и начнёт после этого ходить «симметрично», отвечая на ход Васи ходом на другом краю. Тогда оставшееся количество пустых коробок будет чётным и либо последнюю из них заполнит Петя, либо на краю заполненного участка окажется по 1 камню. Но в любом случае Вася не сможет сходить, значит, он проиграл, а Петя выиграл.

4. Три велосипедиста могут двигаться по сторонам треугольника *ABC* со следующими скоростями:

	AB	*BC*	*CA*
1-ый	12 км/ч	10 км/ч	15 км/ч
2-ой	15 км/ч	15 км/ч	10 км/ч
3-ий	10 км/ч	20 км/ч	12 км/ч

Известно, что они одновременно стартовали из пункта *A*, проехали по маршруту *A–B–C–A* и одновременно же финишировали в *A*. Докажите, что треугольник *ABC* – прямоугольный.

***Решение*:** Пусть $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Тогда $\frac{c}{12}+\frac{a}{10}+\frac{b}{15}=\frac{c}{15}+\frac{a}{15}+\frac{b}{10}=\frac{c}{10}+\frac{a}{20}+\frac{b}{12}$. Умножим на 60: $5c+6a+4b=4c+4a+6b=6c+3a+5b$. Тогда из первого равенства $c=2b-2a$, из второго: $b=2c-a$. Отсюда найдём, что $a=\frac{3}{5}b$, $c=\frac{4}{5}b$. Тогда $a^2+c^2=\frac{9}{25}b^2+\frac{16}{25}b^2=b^2$, значит, по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle ABC=90°$ и треугольник ABC – прямоугольный.

5. Имеется 100 карточек с надписями «Слева от меня – как минимум 2 ложных утверждения», «Слева от меня – как минимум 4 ложных утверждения», …, «Слева от меня – как минимум 200 ложных утверждений». Петя разложил карточки в ряд слева направо в каком-то порядке. Какое наибольшее число утверждений могло оказаться истинными? (*А.В.Шаповалов*)

Ответ: 33. ***Доказательство оценки:*** Пусть «правдивы» $k \geq 34$ карточек, тогда «лгут» не больше 66 карточек. Все числа на правдивых карточках разные, значит, на одной из них есть число, не меньшее $2k \geq 68$. Значит, ложных утверждений как минимум 68. Противоречие. *Пример* на 33 правдивых карточки: числа идут в таком порядке: 200, 198, 2, 196, 194, 4, 192, 190, 6, …, 72, 70, 66, 68. Правдивыми окажутся карточки с числами от 2 до 66 – всего 33 карточки.

6. Можно ли клетчатый прямоугольник 33×33 разрезать по границам клеток на прямоугольники периметра 22? (*С.Л.Берлов*)

Ответ: Нельзя. ***Доказательство*:** Заметим, что периметр 22 будет у прямоугольника с суммой сторон, равной 11, т.е. у прямоугольников 10×1, 9×2, 8×3, 7×4 и 6×5. При этом каждый прямоугольник имеет один чётный размер и будет накрывать чётное количество клеток прямоугольника 33×33. Тогда и все прямоугольники в сумме накроют чётное количество клеток, а их у нас нечётное – 33^2. Значит, разрезать на прямоугольники периметра 22 не удастся.

7. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Существует ли такое натуральное число n, что $S(n)\cdot S(n+1)=465$?

Ответ: Да, например, число $2\underbrace{99\ldots9}_{17\,девяток}$, его сумма цифр равна 2+9·17=155, сумма цифр следующего число $3\cdot10^{17}$ равна 3, а 155·3=465.

8. Несколько хамелеонов двух цветов – красного и синего – выстроились в круг. По свистку хамелеон у которого оба соседа такого же как он цвета меняет свой цвет на противоположный (если таких хамелеонов несколько, все они меняют цвет одновременно). Прозвучало 5 свистков. Могло ли случиться, что каждый раз меняло цвет ровно вдвое меньше хамелеонов, чем по предыдущему свистку? *(Д.А.Белов, А.В.Шаповалов)*

Ответ: Могло. ***Пример:*** Заметим, что группа одноцветных хамелеонов длины не менее 3 каждым ходом сокращается на 2 и превращается в группу другого цвета, а между такими группами хамелеоны стоят чередующимися по цвету по одному или по двое. Тогда возьмём следующую расстановку групп одноцветных хамелеонов с чередованием цвета: 12, 8, 6, 6, 4, 4, 4, 4 – всего 48 хамелеонов. После первого свистка останутся группы 10, 6, 4, 4, 2, 2, 2, 2, между которыми появятся чередующиеся по цвету хамелеоны. При этом именно хамелеоны этих групп и поменяли цвет – всего 32 хамелеона. Далее произойдут следующие изменения уменьшающихся групп: 2) 8, 4, 2, 2 – 16 сменивших цвет хамелеонов; 3) 6, 2 – 8 хамелеонов; 4) 4; 5) 2. Таким образом, каждый раз цвет меняло ровно вдвое меньше хамелеонов.