VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

Высшая лига. Финал за 1-2 места. Лицей 29(I) – Лицей 41(I). *27 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. Какое наименьшее количество клеток можно закрасить на доске 10×10 так, чтобы в любом прямоугольнике 2×3 была хотя бы одна закрашенная клетка?
2. Внутри ΔABC проведены отрезки AD, CE (D, E принадлежат BC и AB соответственно). Пусть O – точка пересечения AD и CE. Оказалось, что $\angle DAC=\angle ECB$, $\angle BAD=\angle OBC$. Найдите все возможные значения отношения $BD: DC$.
3. В однокруговом шахматном турнире на n шахматистов в некоторый момент было сыграно ровно 70 партий. При каком наибольшем n среди них обязательно найдутся три шахматиста, сыгравшие между собой все партии?
4. Фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, … клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти бесконечную клетчатую плоскость, побывав на каждой клетке ровно 1 раз?
5. Какое наибольшее целое число можно получить, заменив звездочки в выражении $\sqrt{*\sqrt{*\ldots\sqrt{*}}}$, содержащем 2005 звездочек, числами 2^1, 2^2, ..., 2^{2005} и используя каждое ровно один раз?
6. Доказать, что при различных натуральных m и n выполняется неравенство $\left|\ln\frac{m}{n}\right|\geq\frac{1}{\max(m,n)}$.
7. Биссектрисы углов $\angle DAB$ и $\angle DCB$ вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на диагонали BD. M – середина этой диагонали. Прямая, параллельная AD и проходящая через точку C, пересекает луч AM в точке P. Докажите, что ΔDPC – равнобедренный.
8. Существует ли такое разбиение множества натуральных чисел на 2005 подмножеств, что ни в одном из них нет бесконечной арифметической прогрессии, а в объединении любых двух подмножеств такая прогрессия есть?

VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

Высшая лига. Финал за 3-4 места. Школа 30(I) – Лицей 41(II). *27 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. Какое наименьшее количество клеток можно закрасить на доске 10×10 так, чтобы в любом прямоугольнике 2×3 была хотя бы одна закрашенная клетка?
2. Внутри ΔABC проведены отрезки AD, CE (D, E принадлежат BC и AB соответственно). Пусть O – точка пересечения AD и CE. Оказалось, что $\angle DAC=\angle ECB$, $\angle BAD=\angle OBC$. Найдите все возможные значения отношения $BD: DC$.
3. Какое наибольшее количество чисел может быть в последовательности, в которой все числа являются квадратами натуральных чисел и каждое следующее число получается из предыдущего приписыванием к нему справа одной цифры?
4. Фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, … клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти бесконечную клетчатую плоскость, побывав на каждой клетке ровно 1 раз?
5. Про n натуральных чисел известно, что ровно в 2005 парах из них одно из чисел делится на другое. При каком наибольшем n среди них обязательно найдутся такие три числа a, b и c, что a делится на b и b делится на c?
6. Существуют ли такие 2 многочлена P(x) и Q(x), что P(Q(x))+Q(P(x))=P(x)Q(x)?
7. Биссектрисы углов $\angle DAB$ и $\angle DCB$ вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на диагонали BD. M – середина этой диагонали. Прямая, параллельная AD и проходящая через точку C, пересекает луч AM в точке P. Докажите, что ΔDPC – равнобедренный.
8. Существует ли такое разбиение множества натуральных чисел на 3 подмножества, что ни в одном из них нет бесконечной арифметической прогрессии, а в объединении любых двух подмножеств такая прогрессия есть?

VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

Первая лига. Финал за 1-2 места. Лицей 29(II) – Школа 30(II). *27 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. Какое наименьшее количество клеток можно закрасить на доске 10×10 так, чтобы в любом прямоугольнике 2×3 была хотя бы одна закрашенная клетка?
2. Внутри ΔABC проведены отрезки AD, CE (D, E принадлежат BC и AB соответственно). Пусть O – точка пересечения AD и CE. Оказалось, что $\angle DAC=\angle ECB$, $\angle BAD=\angle OBC$. Найдите все возможные значения отношения $BD: DC$.
3. Какое наибольшее количество чисел может быть в последовательности, в которой все числа являются квадратами натуральных чисел и каждое следующее число получается из предыдущего приписыванием к нему справа одной цифры?
4. Фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, … клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти бесконечную клетчатую плоскость, побывав на каждой клетке ровно 1 раз?
5. Про n натуральных чисел известно, что ровно в 2005 парах из них одно из чисел делится на другое. При каком наибольшем n среди них обязательно найдутся такие три числа a, b и c, что a делится на b и b делится на c?
6. Существуют ли такие 2 многочлена P(x) и Q(x), что P(Q(x))+Q(P(x))=P(x)Q(x)?
7. Биссектрисы углов $\angle DAB$ и $\angle DCB$ вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на диагонали BD. M – середина этой диагонали. Прямая, параллельная AD и проходящая через точку C, пересекает луч AM в точке P. Докажите, что ΔDPC – равнобедренный.
8. Существует ли такое разбиение множества натуральных чисел на 3 подмножества, что ни в одном из них нет бесконечной арифметической прогрессии, а в объединении любых двух подмножеств такая прогрессия есть?

VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

Первая лига. Финал за 3-4 места. ФМЛ(Глазов) – Лицей 18 (Сарапул).

27 ноября 2005 года. г.Ижевск

1. Какое наименьшее количество клеток можно закрасить на доске 10×10 так, чтобы в любом прямоугольнике 2×3 была хотя бы одна закрашенная клетка?
2. Внутри ΔABC проведены отрезки AD, CE (D, E принадлежат BC и AB соответственно). Пусть O – точка пересечения AD и CE. Оказалось, что $\angle DAC=\angle ECB$, $\angle BAD=\angle OBC$. Найдите все возможные значения отношения $BD: DC$.
3. Какое наибольшее количество чисел может быть в последовательности, в которой все числа являются квадратами натуральных чисел и каждое следующее число получается из предыдущего приписыванием к нему справа одной цифры?
4. Фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, … клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти бесконечную клетчатую плоскость, побывав на каждой клетке ровно 1 раз?
5. Про 40 натуральных чисел известно, что ровно в 400 парах из них одно из чисел делится на другое. Верно ли, что среди них обязательно найдутся такие три числа a, b и c, что a делится на b и b делится на c?
6. Какие правильные многоугольники со стороной a можно разрезать на другие правильные многоугольники со стороной a?
7. В тетраэдре противоположные ребра равны (для каждой пары). Доказать, центр вписанной сферы совпадает с центром описанной.
8. По кругу в некотором порядке выписаны все натуральные числа от 1 до 2005. Доказать, что найдутся либо стоящие рядом, либо стоящие через одно числа, модуль разности которых меньше 700.

VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

Первая лига. Финал за 5-6 места. Гимназия 56 – Школа 45. *27 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. Уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg}x + a - 1}{\operatorname{tg}x + a + 1}$ имеет корень. Доказать, что $|a| \geq 1$.
2. Внутри ΔABC проведены отрезки AD, CE (D, E принадлежат BC и AB соответственно). Пусть O – точка пересечения AD и CE. Оказалось, что $\angle DAC = \angle ECB$, $\angle BAD = \angle OBC$. Докажите, что D – середина стороны BC.
3. Какое наибольшее количество чисел может быть в последовательности, в которой все числа являются квадратами натуральных чисел и каждое следующее число получается из предыдущего приписыванием к нему справа одной цифры?
4. Можно ли так отметить часть клеток бесконечной клетчатой плоскости, чтобы среди любых 2005 подряд идущих клеток по вертикали, горизонтали или диагонали, была ровно одна отмеченная?
5. Про 40 натуральных чисел известно, что ровно в 400 парах из них одно из чисел делится на другое. Верно ли, что среди них обязательно найдутся такие три числа a, b и c, что a делится на b и b делится на c?
6. Какие правильные многоугольники со стороной a можно разрезать на другие правильные многоугольники со стороной a?
7. В тетраэдре противоположные ребра равны (для каждой пары). Доказать, центр вписанной сферы совпадает с центром описанной.
8. По кругу в некотором порядке выписаны все натуральные числа от 1 до 2005. Доказать, что найдутся либо стоящие рядом, либо стоящие через одно числа, модуль разности которых меньше 700.

VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронецкого

Первая лига. Финал за 7-8 места. Лицей (Воткинск) – Школа 12(Воткинск).

27 ноября 2005года. г.Ижевск

1. Уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\operatorname{tg}x + a - 1}{\operatorname{tg}x + a + 1}$ имеет корень. Доказать, что $|a| \geq 1$.
2. Внутри ΔABC проведены отрезки AD, CE (D, E принадлежат BC и AB соответственно). Пусть O – точка пересечения AD и CE. Оказалось, что $\angle DAC = \angle ECB$, $\angle BAD = \angle OBC$. Докажите, что D – середина стороны BC.
3. Какое наибольшее количество чисел может быть в последовательности, в которой все числа являются квадратами натуральных чисел и каждое следующее число получается из предыдущего приписыванием к нему справа одной цифры?
4. Можно ли так отметить часть клеток бесконечной клетчатой плоскости, чтобы среди любых 5 подряд идущих клеток по вертикали, горизонтали или диагонали, была ровно одна отмеченная?
5. Про 10 натуральных чисел известно, что ровно в 25 парах из них одно из чисел делится на другое. Верно ли, что среди них обязательно найдутся такие три числа a, b и c, что a делится на b и b делится на c?
6. Какие правильные многоугольники со стороной a можно разрезать на другие равные между собой правильные многоугольники со стороной a?
7. В тетраэдре противоположные ребра равны (для каждой пары). Доказать, центр вписанной сферы совпадает с центром описанной.
8. По кругу в некотором порядке выписаны все натуральные числа от 1 до 2005. Доказать, что найдутся либо стоящие рядом, либо стоящие через одно числа, модуль разности которых меньше 700.