IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.
Высшая лига. **<u>ФИНАЛ.</u>** *10 января 2004 года.*

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B, удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что в арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, с разностью, взаимно простой с 110, имеется бесконечно много «чисел-перевёртышей». (*Перевёртышем* назовём натуральное число, которое одинаково записывается в обе стороны, например, 2002, 1252521.)
3. AE – хорда окружности Ω. Окружность ω касается этой хорды и одной из дуг AE. Q – середина второй дуги AE. Хорда QP касается окружности ω в точке C и пересекает AE в точке B (ω находится внутри криволинейного треугольника PAB). Доказать, что AC – биссектриса угла PAB.
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2\times 2$? *(Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры)*
5. Доказать, что $\frac{1}{kn}+\frac{1}{kn+1}+\frac{1}{kn+2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)n-1} \geq n\left(\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}}-1\right)$ для всех натуральных k и n.
6. В парламенте каждый депутат входит ровно в одну фракцию, причём в каждой фракции должно быть не менее n человек. При выборах главы парламента члены одной фракции переругались между собой и разбежались в другие фракции (а эта фракция прекратила своё существование), после чего некоторые несогласные в тех фракциях также перешли в другие фракции. Докажите, что не менее чем n депутатов выгадали, т.е. теперь у них соратников по фракции стало больше, чем было ранее.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K и M такие, что $3\angle ABM=\angle ABC$, $3\angle ACK=\angle ACB$, а $PK=PM$, где P – точка пересечения отрезков BM и CK. Найдите все треугольники ABC, обладающие описанными выше свойствами.

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.
Высшая лига. **<u>Школа 29-II – ФМЛ (г.Глазов).</u>** *10 января 2004 года.*

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B, удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 210 становится составным.
3. В круге площади 1 проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды, находящиеся от центра на расстоянии а. Найдите площадь, ограниченную окружностью и двумя неравными отрезками хорд.
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2\times 2$? *(Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры)*
5. Доказать, что $\frac{1}{kn}+\frac{1}{kn+1}+\frac{1}{kn+2}+\ldots+\frac{1}{(k+1)n-1} \geq n\left(\sqrt[n]{\frac{k+1}{k}}-1\right)$ для всех натуральных k и n.
6. Вася выписывает в ряд все натуральные числа, не превосходящие 100, так, чтобы они не повторялись. Он начал с числа 50 и выписал все 100 чисел. Докажите, что был момент, когда сумма всех выписанных чисел делилась на 3.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K и M такие, что $3\angle ABM=\angle ABC$, $3\angle ACK=\angle ACB$, а $PK=PM$, где P – точка пересечения отрезков BM и CK. Найдите все треугольники ABC, обладающие описанными выше свойствами.

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.
***Высшая лига.* <u>Школа 30-I – школа 52.</u>** *10 января 2004 года.*

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B, удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 210 становится составным.
3. В круге площади 1 проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды, находящиеся от центра на расстоянии а. Найдите площадь, ограниченную окружностью и двумя неравными отрезками хорд.
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2\times 2$? *(Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры)*
5. Числа x, y, z таковы, что их модули не меньше 2. Найти $\min |xyz + 2(x + y + z)|$.
6. Вася выписывает в ряд все натуральные числа, не превосходящие 100, так, чтобы они не повторялись. Он начал с числа 50 и выписал все 100 чисел. Докажите, что был момент, когда сумма всех выписанных чисел делилась на 3.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K и M такие, что $3\angle ABM=\angle ABC$, $3\angle ACK=\angle ACB$, а $PK=PM$, где P – точка пересечения отрезков BM и CK. Найдите все треугольники ABC, обладающие описанными выше свойствами.

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.
***Первая лига.* <u>ФИНАЛ.</u>** *10 января 2004 года.*

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B, удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 210 становится составным.
3. В круге площади 1 проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды, находящиеся от центра на расстоянии а. Найдите площадь, ограниченную окружностью и двумя неравными отрезками хорд.
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2\times 2$? *(Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры)*
5. Числа x, y, z таковы, что их модули не меньше 2. Найти $\min |xyz + 2(x + y + z)|$.
6. Вася выписывает в ряд все натуральные числа, не превосходящие 100, так, чтобы они не повторялись. Он начал с числа 50 и выписал все 100 чисел. Докажите, что был момент, когда сумма всех выписанных чисел делилась на 3.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки K и M такие, что $3\angle ABM=\angle ABC$, $3\angle ACK=\angle ACB$, а $PK=PM$, где P – точка пересечения отрезков BM и CK. Найдите все треугольники ABC, обладающие описанными выше свойствами.

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.

Первая лига. **<u>III тур.</u>** *10 января 2004 года.*

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B, удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 210 становится составным.
3. Дан треугольник ABC, на стороне AC которого взята точка D. Могут ли оказаться равными вписанная окружность треугольника ABD и описанная окружность треугольника BDC?
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2\times 2$? *(Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры)*
5. В группе из 100 человек каждый имеет не более 10 знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать 10 человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.
6. Вася выписывает в ряд все натуральные числа, не превосходящие 100, так, чтобы они не повторялись. Он начал с числа 50 и выписал все 100 чисел. Докажите, что был момент, когда сумма всех выписанных чисел делилась на 3.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. В круге площади 1 проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды, находящиеся от центра на расстоянии а. Найдите площадь, ограниченную окружностью и двумя неравными отрезками хорд.

IV Республиканский математический турнир памяти А.Б.Воронецкого.

Первая лига. **<u>III тур.</u>** *10 января 2004 года.*

1. Учитель дал ученику задание: «Найти все пары 9-значных чисел A и B, удовлетворяющих следующим условиям: а). в записи каждого числа встречаются все цифры от 1 до 9; б). $A + B = 987654321$». Через неделю ученик нашел 396 таких пар и утверждал, что больше их нет. Прав ли он? (Пары (A, B) и (B, A) считаются одинаковыми).
2. Докажите, что существует простое число, большее миллиона, которое после прибавления 210 становится составным.
3. Дан треугольник ABC, на стороне AC которого взята точка D. Могут ли оказаться равными вписанная окружность треугольника ABD и описанная окружность треугольника BDC?
4. Верно ли, что если $\overline{ДВАЖДЫ} \times 2 = \overline{ЧЕТЫРЕ}$, то $\overline{Ч} = 2\times 2$? *(Одинаковые буквы – одинаковые цифры, а разные буквы – разные цифры)*
5. В группе из 100 человек каждый имеет не более 10 знакомых среди остальных. Докажите, что можно выбрать 10 человек, никакие двое из которых не знакомы друг с другом.
6. Вася выписывает в ряд все натуральные числа, не превосходящие 100, так, чтобы они не повторялись. Он начал с числа 50 и выписал все 100 чисел. Докажите, что был момент, когда сумма всех выписанных чисел делилась на 3.
7. Доказать, что любая система неравенств равносильна некоторому уравнению.
8. В круге площади 1 проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды, находящиеся от центра на расстоянии а. Найдите площадь, ограниченную окружностью и двумя неравными отрезками хорд.