III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Первая лига (финал за 1-2 места). 17 ноября 2002 года.

1. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Каково максимальное количество троек a_i, a_j, a_k, составляющих арифметическую прогрессию?
2. На всех черных клетках шахматной доски, кроме 3 соседних клеток одной (не обязательно главной) диагонали, стоят шашки. Шашка не может ходить, но может взять соседнюю по обычным правилам. Доказать, что после всех взятий на доске останется не менее 2 шашек.
3. *ABDE*, *BCEF*, *CDFA* – параллелограммы в пространстве. Доказать, что середины отрезков *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* и *FA* лежат в 1 плоскости.
4. Лягушка прыгает по доске $2n\times 2n$. Каждый прыжок имеет длину $\sqrt{n^2+1}$ и ведет из центра одной клетки в центр другой. Какие-то m клеток покрасили в синий цвет, а все клетки, куда можно прыгнуть из синей клетки, пометили знаком # (независимо от их цвета). Всего оказалось k #-клеток. Доказать, что $k \geq m$.
5. При каком наименьшем k для сторон a, b, c произвольного треугольника выполняется неравенство $a^3+b^3+c^3 \leq k(a+b+c)(ab+bc+ca)$?
6. Точки *D*, *E* и *F* лежат на сторонах *BC*, *CA* и *AB* неравнобедренного прямоугольного треугольника *ABC*. *AFDE* – квадрат. Доказать, что прямые *BC*, *FE* и касательная к описанной окружности треугольника *ABC* в точке *A* пересекаются в одной точке.
7. Даны 2^n конечных последовательностей из 0 и 1, причём ни одна из них не является началом другой. Найдите наименьшую возможную сумму их длин.
8. В выпуклом n-угольнике (n>4) никакие 3 диагонали не пересекаются во внутренней точке. Какое наибольшее количество диагоналей в нём можно провести так, что все части, на которые они разобьют n-угольник, окажутся треугольниками?

III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Первая лига (финал за 3-4 места). 17 ноября 2002 года.

1. На всех черных клетках шахматной доски, кроме 3 соседних клеток одной (не обязательно главной) диагонали, стоят шашки. Шашка не может ходить, но может взять соседнюю по обычным правилам. Доказать, что после всех взятий на доске останется не менее 2 шашек.
2. *ABDE*, *BCEF*, *CDFA* – параллелограммы в пространстве. Доказать, что середины отрезков *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* и *FA* лежат в одной плоскости.
3. Лягушка прыгает по доске $2n\times 2n$. Каждый прыжок имеет длину $\sqrt{n^2+1}$ и ведет из центра одной клетки в центр другой. Какие-то m клеток покрасили в синий цвет, а все клетки, куда можно прыгнуть из синей клетки, пометили знаком # (независимо от их цвета). Всего оказалось k #-клеток. Доказать, что $k \geq m$.
4. Точки *D*, *E* и *F* лежат на сторонах *BC*, *CA* и *AB* неравнобедренного прямоугольного треугольника *ABC*. *AFDE* – квадрат. Доказать, что прямые *BC*, *FE* и касательная к описанной окружности треугольника *ABC* в точке *A* пересекаются в одной точке.
5. Докажите, что для любых четырех натуральных чисел a, b, c, и d существует такое рациональное число x, что дробные части всех четырех чисел ax, bx, cx и dx больше ½. (*Дробной частью* числа y называется разность между y и наибольшим целым числом, не превосходящим y).
6. Школьники писали олимпиаду, проходившую в два тура. В каждом кабинете писали хотя бы два участника. Докажите, что найдутся два школьника, которые во время обоих туров сидели в кабинетах с одинаковым числом участников.
7. Назовём число удачным, если цифры в его десятичной записи можно разбить на 2 группы с одинаковой суммой. Существует ли такое число A, что A, A+1, A+2 – удачные?
8. Можно ли каждую сторону квадрата разделить на 100 частей так, чтобы из полученных 400 отрезков нельзя было бы составить контура никакого прямоугольника, отличного от исходного квадрата?

III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
Первая лига (бои за 5-8 места). 17 ноября 2002 года.

1. Взяты два двузначных числа. Когда первое умножили на 100, оно разделилось на второе без остатка. Доказать, что полученное частное не может быть меньше 15.

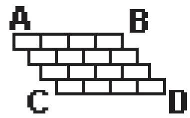
2. Кровати в казарме стоят в форме квадрата 100×100. Рядовой Чонкин заправляет кровати, а прапорщик Миляга принимает его работу. Если рядом с только что заправленной кроватью есть ровно две незаправленные, то прапорщик расправляет ее и влепляет рядовому наряд. Докажите, что рядовой Чонкин может заправлять кровати в таком порядке, чтобы не получить ни одного наряда.

3. Докажите, что для любых четырех натуральных чисел a, b, c, и d существует такое рациональное число x, что дробные части всех четырех чисел ax, bx, cx и dx больше ½. (*Дробной частью* числа y называется разность между y и наибольшим целым числом, не превосходящим y).

4. На стороне BC квадрата $ABCD$ выбрана точка M. На стороне CD выбрана такая точка P, что $AP\perp MD$. На стороне AB выбрана такая точка Q, что $DQ\perp MA$. Докажите, что прямая PQ проходит через центр квадрата.

5. Школьники писали олимпиаду, проходившую в два тура. В каждом кабинете писали хотя бы два участника. Докажите, что найдутся два школьника, которые во время обоих туров сидели в кабинетах с одинаковым числом участников.

6. На знаменитой картине да Винчи "Стена плача" изображено n горизонтальных рядов по n одинаковых кирпичей, каждый ряд со сдвигом на полкирпича относительно предыдущего ряда (см. рис.). Сколько раз отрезок AD пересечет вертикальные и горизонтальные щелочки между кирпичами?



7. Назовём число удачным, если цифры в его десятичной записи можно разбить на 2 группы с одинаковой суммой. Существует ли такое число A, что A, A+1, A+2 – удачные?

8. Можно ли каждую сторону квадрата разделить на 100 частей так, чтобы из полученных 400 отрезков нельзя было бы составить контура никакого прямоугольника, отличного от исходного квадрата?

III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.
ФИНАЛ за I-II места. 17 ноября 2002 года.

1. Пусть α - вещественное число такое, что все числа 1^α, 2^α, 3^α, … – целые. Докажите, что α – целое неотрицательное число.
2. Вневписанные окружности треугольника ABC касаются сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке N, а перпендикуляры к сторонам AB и BC, проходящие через точки C_1 и A_1 соответственно, пересекаются в точке K. Докажите, что $\overrightarrow{NK}=\overrightarrow{HI}$, где H – ортоцентр, I – центр вписанной окружности треугольника ABC.
3. Пусть $\mathbb{R}^+$ обозначает множество всех положительных вещественных чисел. Найдите все функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, удовлетворяющие при всех $x, y \in \mathbb{R}^+$ равенству $f(xf(y))=f(xy)+x$.
4. На доске записаны числа 1001^2, 1002^2, 1003^2, …, 1997^2. Каждым ходом разрешается стереть любые три числа a, b, c и вместо них записать число $\frac{a}{3}$ (если $a \le b \le c$). Докажите, что если после серии таких операций на доске останется только одно число, то оно будет меньше 2007.
5. При каком наименьшем k для сторон a, b, c произвольного треугольника выполняется неравенство $a^3+b^3+c^3 \le k(a+b+c)(ab+bc+ca)$?
6. Даны 2^n конечных последовательностей из 0 и 1, причём ни одна из них не является началом другой. Найдите наименьшую возможную сумму их длин.
7. В выпуклом n-угольнике (n>4) никакие 3 диагонали не пересекаются во внутренней точке. Какое наибольшее количество диагоналей в нём можно провести так, что все части, на которые они разобьют n-угольник, окажутся треугольниками?
8. Многочлен f(x) степени n имеет n различных ненулевых корней. Доказать, что уравнение $f\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)=0$ имеет ровно n^2 вещественных корней.

III Кубок памяти А.Б.Воронецкого.

Высшая лига (финал за 3-4 места). 17 ноября 2002 года.

1. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Каково максимальное количество троек a_i, a_j, a_k, составляющих арифметическую прогрессию?
2. Дан прямоугольный треугольник *ABC*. Построить внутри него такую точку *N*, что углы *NAB*, *NBC* и *NCA* равны между собой. Сколько решений имеет задача?
3. На всех черных клетках шахматной доски, кроме 3 соседних клеток одной (не обязательно главной) диагонали, стоят шашки. Шашка не может ходить, но может взять соседнюю по обычным правилам. Доказать, что после всех взятий на доске останется не менее 2 шашек.
4. При каком наименьшем *k* для сторон *a*, *b*, *c* произвольного треугольника выполняется неравенство $a^3+b^3+c^3 \le k(a+b+c)(ab+bc+ca)$?
5. *BD* и *CE* – высоты остроугольного треугольника *ABC*. Прямая *BD* пересекает окружность с диаметром *AC* в точках *P* и *Q*, прямая *CE* пересекает окружность с диаметром *AB* в точках *M* и *N*. Доказать, что точки *P*, *Q*, *M* и *N* лежат на одной окружности.
6. Даны 2^n конечных последовательностей из 0 и 1, причём ни одна из них не является началом другой. Найдите наименьшую возможную сумму их длин.
7. В выпуклом n-угольнике (n>4) никакие 3 диагонали не пересекаются во внутренней точке. Какое наибольшее количество диагоналей в нём можно провести так, что все части, на которые они разобьют n-угольник, окажутся треугольниками?
8. Многочлен f(x) степени *n* имеет *n* различных ненулевых корней. Доказать, что уравнение $f\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)=0$ имеет ровно n^2 вещественных корней.